2) * f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$,

elle réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [f(\pi),f(0)] = [1,5]$

3) - a) $g(5) = 0$; $g(1) = \pi$; $g(3) = \frac{\pi}{2}$

b) * f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $f'(x) = -2\sin x \neq 0 \; ? \; \forall x \in]0,\pi[$

d'où : g est dérivable sur $f(]0,\pi[) =]1,5[$

$(g)'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{2\sin y}$ avec $y = g(x)$; $f(y) = x$

$$2\cos y + 3 = x \iff \cos y = \frac{x-3}{2}$$

* on a : $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$, car $\sin y > 0$

$\sin y = \sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}$ d'où : $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$

EXERCICE№12

$f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1) et $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \geq 0$ pour tout $x \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

* f est continue et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{2},\pi[$,

elle réalise donc une bijection de $[\frac{\pi}{2},\pi[$ sur $f([\frac{\pi}{2},\pi[) = [f(\frac{\pi}{2}), \lim_{x\to\pi^-} f[= [1,+\infty[$

2) soit $\alpha = (f^{-1})(\frac{2\sqrt{3}}{3}) \iff \begin{cases} f(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[\end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[\end{cases}$

$\iff \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[\end{cases} \iff \alpha = \frac{2\pi}{3}$ d'où : $(f^{-1})(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\pi}{3}$; $(f^{-1})(\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$

3) * f est continue sur $[\frac{\pi}{2},\pi[$, d'où : f^{-1} est continue sur $[1,+\infty[$

* f est dérivable sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$ et $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \neq 0$

d'où : f^{-1} est dérivable sur $f(]\frac{\pi}{2},\pi[) =]1,+\infty[$

* f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1 (voir EX :7 , 2) – c))

Conclusion :

f^{-1} est continue sur $[1,+\infty[$; f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn